

文章编号: 1674-8190(2024)01-051-10

时变可靠性分析的高效近似最大可能轨迹法

邹南征¹, 龚春林¹, 张云伟², 马梦颖³, 杜思怡¹, 李春娜¹

(1. 西北工业大学 航天学院, 西安 710072)

(2. 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076)

(3. 中国运载火箭技术研究院, 北京 100076)

摘要: 现有的时变可靠性分析方法在处理飞行器复杂时变可靠性分析问题, 具有求解效率过低的缺点。在基于近似最大可能轨迹的时变可靠性分析方法的基础上, 根据时间离散所得串联系统瞬时可靠度最小的组件决定整个系统可靠度的特点, 在最大可能轨迹自适应建模过程中同时考虑轨迹模型的预测误差和预估增加样本, 提出时变可靠性分析的高效近似最大可能轨迹法; 采用解析算例验证最大可能轨迹法的有效性, 并将该可靠性分析方法应用于水动力涡轮叶片和航天飞机机翼的时变可靠性分析。结果表明: 在精度相近的情况下, 所提方法对极限状态函数调用次数不高于基于时间离散的可靠性分析方法的 3%。

关键词: 时变可靠性; 时间离散; 最大可能轨迹; Kriging 模型; 自适应采样

中图分类号: V214. 11; TB114

文献标识码: A

DOI: 10. 16615/j. cnki. 1674-8190. 2024. 01. 06

Efficient approximating the most-probable-point trajectory method for time-variant reliability analysis

ZOU Nanzheng¹, GONG Chunlin¹, ZHANG Yunwei², MA Mengying³, DU Siyi¹, LI Chunna¹

(1. School of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(2. Beijing Institute of Astronautical System Engineering, Beijing 100076, China)

(3. China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China)

Abstract: When solving complex time-variant reliability analysis (TRA) problems, the traditional TRA methods have the problem of low solving efficiency. Based on the approximating most-probable-points trajectory (AMPPT) method, the efficient approximating the most-probable-point trajectory (EAMPPT) method for TRA is proposed. According to the characteristics that the reliability of weakest part of the system determines the reliability of the system, EAMPPT takes full account of prediction values and their errors in the process of approximating the most-probable-point trajectory. The mathematical example is used to verify the effectiveness of the adaptive sampling method. EAMPPT is applied to solve TRA problems involving hydrokinetic turbine blades and the wing of the reusable aerospace during reenter. The results show that the calculation accuracy of the proposed EAMPPT and time-discretization based TRA method is similar, but the number of performance function evaluations of EAMPPT is less than 3% of traditional TDTRA.

Key words: time-variant reliability; time discretization; most-probable-point trajectory; Kriging model; adaptive sampling

收稿日期: 2022-11-03; 修回日期: 2023-02-17

通信作者: 李春娜(1982-), 女, 博士, 副教授。E-mail: chunnali@nwpu.edu.cn

引用格式: 邹南征, 龚春林, 张云伟, 等. 时变可靠性分析的高效近似最大可能轨迹法[J]. 航空工程进展, 2024, 15(1): 51-60.

ZOU Nanzheng, GONG Chunlin, ZHANG Yunwei, et al. Efficient approximating the most-probable-point trajectory method for time-variant reliability analysis[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2024, 15(1): 51-60. (in Chinese)

0 引言

可靠性是指产品或系统在规定条件及时间内,完成规定任务的能力,常用于对产品或系统的定性评估。飞行器作为在恶劣环境中工作的高价值系统,对其进行可靠性分析具有重要意义。目前,可靠性分析已经广泛应用于飞行器的结构、控制和动力等系统设计中^[1-3]。传统的静态可靠性分析模型不考虑时变因素^[4-5],但对于飞行器等复杂工程系统^[6-7],经常面临诸多动态或时变不确定性因素,如材料属性退化、动态载荷以及外部运行环境改变等,因此使用静态分析方法无法满足可靠性分析的要求。

时变可靠性分析(Time-variant Reliability Analysis,简称 TRA)可求解在时变不确定性影响下,工程系统完成预期功能的概率,即时变可靠度。传统的时变可靠性分析的方法有基于极值^[8-14]和基于首次穿越^[15-18]的两类方法。

基于极值的时变可靠性分析方法,通过确定系统随机响应的极值分布来求解时变可靠度。由于复杂问题的极值分布没有解析解,一般采用代理模型方法来预估系统随机响应的极值分布。Wang Zequn 等^[12]提出了一种嵌套极值响应面方法,可将时变可靠性分析问题转化为静态问题,再用成熟的静态可靠性分析方法进行求解,但其求解过程中包含双层循环结构,计算量大;Hu Zhen 等^[13-14]提出混合高效全局优化方法和单层 Kriging 模型方法,但在样本的获取过程中要执行全局优化,因此效率不高。

基于首次穿越的时变可靠性分析方法通过计算穿越率,即系统响应越过约束边界使系统转变为失效状态的概率,来计算时变可靠度。Rice^[16]于 20 世纪 40 年代提出了著名的首次穿越概率计算公式,为基于首次穿越的时变可靠性方法奠定了基础;Andrieu-Renaud 等^[17]通过假设一段时间内发生的穿越事件相互独立,提出了 PHI2 方法,简化了穿越率的计算。但在实际工程中,穿越率的概念难以理解,且穿越事件相互独立的条件难以满足,从而限制了该方法的应用。

近年来, Jiang Chao 等^[19]和 Gong Changqing 等^[20]提出的基于时间离散的时变可靠性分析(Time-discretization based TRA,简称 TDTRA)法通过对随机过程进行时间离散,将时变可靠性问

题转化为时不变串联系统可靠性问题,从而避免了穿越率的计算,简化了时变可靠度的求解。该方法计算精度取决于时间离散点的采样频率,要想获得较高的精度,则需在大量的时间离散点搜索最大可能点(Most-probable-point,简称 MPP),计算成本很高。在 TDTRA 法的基础上,Zhang Yunwei 等^[21]提出了最大可能轨迹(MPPT)的概念,发展了基于近似最大可能轨迹(AMPPT)的时变可靠性分析方法。AMPPT 法通过少量样本构建 MPPT 的 Kriging 模型以获得每一时间离散点的 MPP,随后在 MPP 处将极限状态函数线性化,用于计算系统的累积失效概率。与 TRTDA 法相比,AMPPT 法提高了时变可靠性分析问题的求解效率,但该方法在 Kriging 模型构建的自适应采样过程中,只考虑了模型的预估误差,当 MPPT 较为复杂时,大量的样本点将会取在对时变可靠性分析结果影响较小的时间离散点,造成计算成本的增加。

为了进一步提高复杂时变可靠性分析问题的求解效率,在 AMPPT 法的基础上,根据时间离散所得串联系统瞬时可靠度最小的组件决定整个系统可靠度的特点,本文提出时变可靠性分析的高效近似最大可能轨迹(EAMPPT)法,通过解析算例验证其有效性,并将其用于水动力涡轮叶片和航天飞机机翼的时变可靠性分析中。

1 时变可靠性分析问题描述

时变可靠度是指在时变不确定因素的影响下,产品或系统在规定条件下、规定时间内完成规定任务的概率^[22]。对存在时变不确定性因素的系统,其极限状态函数一般可表示为 $g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t]$ 。在时间间隔 $[t_s, t_e]$ 内,该系统可靠的概率可以定义为

$$P(t_s, t_e) = P_r\{g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t] < 0, \forall t \in [t_s, t_e]\} \quad (1)$$

式中: $P_r\{\cdot\}$ 为概率算子; $g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t] < 0$ 为该产品或系统处于可靠的状态; \mathbf{X} 为一个 n 维的随机变量, $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$,表示系统中的时不变不确定性变量; $\mathbf{Y}(t)$ 为 m 维的随机过程, $\mathbf{Y}(t) = [Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_m(t)]$,表示系统中的时变不确定性变量。

此外,常见的时变极限状态函数还有不包含随机过程的 $g(\mathbf{X}, t)$ 和不显含时间的 $g[\mathbf{X}, Y(t)]$ 两种形式。

2 时变可靠性分析的高效近似可能轨迹法

为了实现时变可靠性问题的高效求解,在 AMPPT 法的基础上,根据时间离散所得串联系统瞬时可靠度最小的组件决定整个系统可靠度的特点,提出 EAMPPT 法。该方法首先构建 MPPT 的 Kriging 模型,然后将极限状态函数的时变响应等效为高斯过程,最后利用高斯过程的扩展线性最优估计(Expansion Optimal Linear Estimation,简称 EOLE)模型^[23]和蒙特卡洛估计^[24](Monte Carlo Simulation,简称 MCS)计算系统的累积失效概率。EAMPPT 法分析流程如图 1 所示。

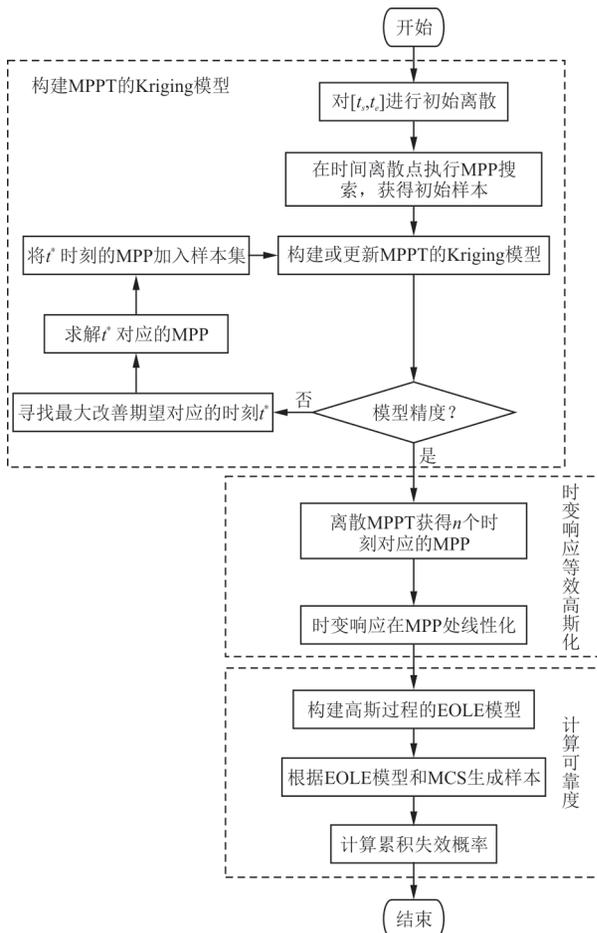


图 1 EAMPPT 法分析流程图

Fig. 1 EAMPPT method analysis flowchart

2.1 最大可能轨迹及其 Kriging 模型

对任意时刻 $t_i \in [t_s, t_e]$, 求解其 MPP, 记为 $\mathbf{u}_{\text{MPP}}(t_i)$ 。将每个时刻的 MPP 连接起来, 可得到一条高维空间中的有向曲线, 即为 MPPT^[22], 记作 $\mathbf{u}_{\text{MPP}}(t), t \in [t_s, t_e]$ 。EAMPPT 法通过构建 MPPT 的 Kriging 模型求解上述时变可靠性分析问题。对于复杂的时变极限状态函数, MPPT 的非线性程度很高。为了减少 MPPT 建模所需的样本量, EAMPPT 法首先对时变极限状态函数进行离散, 获取少量初始样本, 构建初始的 MPPT 模型; 然后根据串联系统的特点更新样本集, 进而更新 MPPT 的 Kriging 模型, 直至满足精度要求。

将 $[t_s, t_e]$ 等距离散成 N_{init} 个初始时间离散点, 并执行 MPP 搜索, 得到初始的 MPP 样本 $\{[t_i, \mathbf{u}_{\text{MPP}}(t_i)] | i = 1, 2, \dots, N_{\text{init}}\}$; 构建初始的 MPPT 的 Kriging 模型 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t)$ 。记 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t)$ 的第 j 维为 $\hat{u}_{\text{MPP},j}(t) (j = 1, 2, \dots, n+m)$, 可表示为

$$\hat{u}_{\text{MPP},j}(t) = f(t) + z(t) \quad (2)$$

式中: $f(t)$ 为该模型的数学期望值; $z(t)$ 为均值为 0、方差为 σ^2 的高斯过程^[25]。

建立初始 MPPT 模型后, EAMPPT 法根据串联系统的特点, 在新样本的选取中既考虑 Kriging 模型的预估误差, 又考虑模型预估值的大小。已知模型分量 $\hat{u}_{\text{MPP},j}(t)$ 的预测结果服从均值为 $\hat{u}_j(t)$ 、方差为 $\hat{s}_j^2(t)$ 的正态分布, 记当前已有最小目标值的二范数为 u_{min} 。定义目标改善量 $I = u_{\text{min}} - \|\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t)\|$, 则目标改善量的数学期望^[26-27]可写为

$$E[I(t)] = \begin{cases} [u_{\text{min}}(t) - \hat{u}(t)] \Phi \left[\frac{u_{\text{min}}(t) - \hat{u}(t)}{\hat{s}(t)} \right] + \hat{s}(t) \phi \left[\frac{u_{\text{min}}(t) - \hat{u}(t)}{\hat{s}(t)} \right] & (\hat{s}(t) > 0) \\ 0 & (\hat{s}(t) = 0) \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\hat{u}(t)$ 为 Kriging 模型预测值的二范数; $\hat{s}(t)$ 为 Kriging 模型预测标准差的二范数; $\Phi\{\cdot\}$ 为标准正态累积分布函数; $\phi\{\cdot\}$ 为标准正态分布概率密度函数。

通过搜索得到最大改善期望对应的时间点 t^* , 在 t^* 时刻进行 MPP 搜索, 得到 $\mathbf{u}_{\text{MPP}}(t^*)$, 将 $[t^*, \mathbf{u}_{\text{MPP}}(t^*)]$ 作为新样本点, 加入 Kriging 模型的训

练样本中。通过不断添加新的样本点,更新 Kriging 模型,直到该模型最大均方误差 σ_{\max}^2 和瞬时可靠度最小处 t_{\min} 的均方误差 σ_{\min}^2 都达到要求,即:

$$\begin{cases} \sigma_{\max}^2 = \max_{t \in [t_s, t_e]} \|\hat{s}^2(t)\|_2 \leq \sigma_{\text{target1}}^2 \\ \sigma_{\min}^2 = \|\hat{s}^2(t_{\min})\|_2 \leq \sigma_{\text{target2}}^2 \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\sigma_{\text{target1}}^2$ 为要求的模型最大均方误差; $\sigma_{\text{target2}}^2$ 为要求的模型最小预测值处的均方误差。

综上所述,目标改善量期望的取值与模型的预估误差和预估值都有关,改善期望较大处具有较小的预估值或较大的预估误差。采用该准则可以根据串联系统的特点添加样本,提高样本使用效率。此外,模型的全局精度和瞬时可靠度最小处的精度可以分别用模型最大均方误差 σ_{\max}^2 和瞬时可靠度最小处的均方误差 σ_{\min}^2 来表示。通过约束该指标,可以保证 Kriging 模型在具有一定全局精度的同时,还在瞬时可靠度最小处具有较高的精度,以保证时变可靠性分析精度。

2.2 时变响应的等价高斯过程化

得到 MPPT 的 Kriging 模型 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t)$ 后,可求得任意时刻 $t_i \in [t_s, t_e]$ 的 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t_i)$ 。通过如 Rosenblatt 变换等映射变换可将瞬时极限状态函数 $g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t_i), t_i]$ 中的 \mathbf{X} 和 $\mathbf{Y}(t_i)$ 转化为标准正态空间中相互独立的变量 \mathbf{W} 和 \mathbf{Z}_i ^[28]。将 MPP 投影到 \mathbf{W} 和 \mathbf{Z}_i 方向可得:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t_i) = [\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP,W}}(t_i), \hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP,Z}}(t_i)] \quad (5)$$

式中: $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP,W}}(t_i)$ 和 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP,Z}}(t_i)$ 分别为 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t_i)$ 在 \mathbf{W} 和 \mathbf{Z}_i 方向的分量。

t_i 时刻的瞬时可靠度指标 $\beta(t_i)$ 和单位梯度法向量 $\boldsymbol{\alpha}(t_i)$ 可表示如下:

$$\begin{cases} \beta(t_i) = \|\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t_i)\| \\ \boldsymbol{\alpha}(t_i) = [\boldsymbol{\alpha}_w(t_i), \boldsymbol{\alpha}_z(t_i)] \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\boldsymbol{\alpha}_w(t_i)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_z(t_i)$ 分别为 \mathbf{W} 和 \mathbf{Z}_i 方向的单位梯度向量。

采用一次可靠度方法^[23](First-order Reliability Analysis Method, 简称 FORM)将瞬时极限状态函数 $g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t_i), t_i]$ 在 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t_i)$ 处线性化,得到正态随机变量 $H(t_i)$:

$$g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t_i), t_i] \approx H(t_i) = -\beta(t_i) + [\boldsymbol{\alpha}_w(t_i)]^T \mathbf{W} + [\boldsymbol{\alpha}_z(t_i)]^T \mathbf{Z}_i \quad (7)$$

重复上述过程,将时变响应 $g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t]$ 在每个离散时刻对应的 MPP 处线性化,即可将其等效为高斯过程 $H(t)$, $H(t)$ 的均值函数和方差函数满足:

$$\begin{cases} \mu(t) = -\beta(t) = -\|\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t)\| \\ \sigma^2(t) = D[H(t_i)] = 1 \end{cases} \quad (8)$$

其自相关系数为

$$\begin{aligned} \rho(t_1, t_2) = & \frac{[\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP,W}}(t_1)]^T \hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP,W}}(t_2)}{\|\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t_1)\| \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t_2)\|} + \\ & \frac{[\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP,Z}}(t_1)]^T \mathbf{C}(t_1, t_2) \hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP,Z}}(t_2)}{\|\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t_1)\| \cdot \|\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t_2)\|} \end{aligned} \quad (9)$$

式中: $\mathbf{C}(t_1, t_2)$ 为标准正态空间中随机过程变量的相关系数矩阵。

2.3 基于扩展最优线性估计的时变可靠度计算方法

在得到等效高斯过程 $H(t)$ 后,可用 EOLE 模型对其进行近似,并通过 MCS 法生成大量 $H(t)$ 的样本点,计算时变可靠度。

将时间间隔等距离散成 k 个时间点 $t_i, i=1, 2, \dots, k$, 得到 $H(t)$ 的协方差矩阵 \mathbf{M} 。设 λ_e 和 $\mathbf{Q}_e (e=1, 2, \dots, k)$ 分别为 \mathbf{M} 的特征值和特征向量,则 $H(t)$ 的 EOLE 模型为

$$H(t) \approx \mu(t) + \sigma(t) \sum_{e=1}^p \frac{\xi_e}{\sqrt{\lambda_e}} \mathbf{Q}_e^T \boldsymbol{\rho}(t) \quad (10)$$

式中: ξ_e 为独立标准正态随机变量, $e=1, 2, \dots, p$; $\boldsymbol{\rho}(t) = [\text{Cov}(t_1, t), \text{Cov}(t_2, t), \dots, \text{Cov}(t_p, t)]^T$; p 为扩展项数,其满足 $p \leq k$, 若 $p = k$ 则该扩展模型的截断误差为零^[21]。

定义指示函数为

$$I(H) = \begin{cases} 1 & \left(\max_{i=1}^k h_i < 0 \right) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

式中: h_i 为 $H(t)$ 的样本 H 在 t_i 时刻的观测值。

根据问题描述中系统可靠的定义可知, $I(H) = 0$ 表示失效。采用 MCS 法生成 N_{MCS} 个 $H(t)$ 的样本 $H_j (j=1, 2, \dots, N_{\text{MCS}})$ 代入指示函数,得到时变可靠度表示如下:

$$P(t_s, t_e) = \sum_{j=1}^{N_{\text{MCS}}} I(H_j) / N_{\text{MCS}} \quad (12)$$

失效概率为

$$P_f = 1 - P(t_s, t_e) \quad (13)$$

综合上述内容, EAMPPT 法的具体步骤如下:

步骤 1: 将时变可靠性分析的时间间隔 $[t_s, t_e]$ 等距离散为 N_{init} 个时间离散点 $t_i (i = 1, 2, \dots, N_{\text{init}})$;

步骤 2: 在初始离散点进行 MPP 搜索, 得到训练样本集 $\{[t_i, \mathbf{u}_{\text{MPP}}(t_i)] | i = 1, 2, \dots, N_{\text{init}}\}$;

步骤 3: 利用样本集构建 MPPT 的 Kriging 模型 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t)$;

步骤 4: 计算模型 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t)$ 在时间间隔 $[t_s, t_e]$ 内使式(3)取值最大的时刻 t^* ;

步骤 5: 在 t^* 时刻进行 MPP 搜索, 将新样本 $[t^*, \mathbf{u}_{\text{MPP}}(t^*)]$ 加入训练样本集;

步骤 6: 计算模型的最大均方误差 σ_{max}^2 和瞬时可靠度最小处 t_{min} 的均方误差 σ_{min}^2 , 若不满足精度要求则转至步骤 3;

步骤 7: 通过 FORM 法, 将极限状态函数 $g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t]$ 等效为高斯过程, 并计算其特征函数;

步骤 8: 利用 EOLE 模型和 MCS 法, 生成 N_{MCS} 个 $H(t)$ 的样本, 并代入式(12)和式(13)计算累积失效概率。

3 算例分析

本文采用一个解析算例对 AMPPT 和 EAMPPT 法采用的自适应加点方法进行对比。随后, 以水力发电装置涡轮叶片^[29]和航天飞机机翼^[30]的可靠性分析为算例, 验证 EAMPPT 法的可行性和有效性。当极限状态函数包含如有限元分析等复杂数值求解过程时, 时变可靠性分析的主要计算成本来自对极限状态函数的调用。因此, 将 MPP 搜索次数以及 MPP 搜索时对初始极限状态函数的总调用次数作为时变可靠性分析方法计算效率的衡量标准。在本文所有算例中, 初始样本数都设置为 3^[21], Kriging 模型允许的最大均方误差为 0.05, 允许的模型最小预测值处的均方误差为 10^{-6} 。

3.1 解析算例

解析算例的时变极限状态函数如下:

$$g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), t] = 1.25\mathbf{Y}(t) + 3.125aX_1X_2 - 0.25(X_1 - 0.0001t)(X_2 - 0.0001t)X_3 \quad (14)$$

式中: t 为时间参数, $t \in [0, 16]$; a 为常数, $a = 7.85 \times 10^4$; X_1, X_2, X_3 为随机变量; $\mathbf{Y}(t)$ 为随机过程。

随机参数的具体分布如表 1 所示。

表 1 解析算例随机参数的分布
Table 1 The distribution of the random parameters of the analytical example

参数	分布类型	均值	标准差	自相关系数函数
X_1	对数正态分布	0.2	0.01	—
X_2	对数正态分布	0.04	0.004	—
X_3	对数正态分布	2.4×10^8	2.4×10^7	—
$\mathbf{Y}(t)$	高斯过程	$\mu_1(t)$	$\sigma_1(t)$	$\exp(- t_1 - t_2 ^2)$

表 1 中 $\mathbf{Y}(t)$ 的均值、标准差函数满足如下公式:

$$\begin{cases} \mu_1(t) = 3500 + 35t \sin t \\ \sigma_1(t) = 700 + 7\exp(0.1t) \end{cases} \quad (15)$$

AMPPT 和 EAMPPT 法都在 0、8 和 16 三个时刻初始取样, 分别采用均方误差 (Mean Square Error, 简称 MSE) 准则和改善期望 (Expected Improvement, 简称 EI) 准则进行自适应采样, 构建 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t)$ 。

AMPPT 法采用的 MSE 准则如下^[21]: 设分量 $\hat{u}_{\text{MPP},j}(t)$ 的预测方差为 $\sigma_j^2(t) (j = 1, 2, \dots, n + m)$, 则 MPPT 模型的均方误差 $e(t)$ 定义为

$$e(t) = \sum_{j=1}^{n+m} \sigma_j^2(t) / (n + m) \quad (16)$$

将时间间隔内使模型均方误差最大的时刻及对应的 MPP 作为新样本加入训练样本集, 更新 MPPT 模型直至满足精度要求。

自适应采样建模的精度和效率如表 2 所示。

表 2 自适应采样建模结果
Table 2 Adaptive sampling modeling results

方法	$\sigma_{t_{\text{min}}}^2$	σ_{max}^2	搜索次数	调用次数
AMPPT	4.8483×10^{-7}	1.3522×10^{-6}	22	285
EAMPPT	3.5367×10^{-11}	4.2400×10^{-2}	12	190

给出瞬时可靠度指标 $\beta = \|\hat{\mathbf{u}}_{\text{MPP}}(t)\|$ 的曲线, 并与 MCS 计算的结果进行对比, 如图 2 所示。

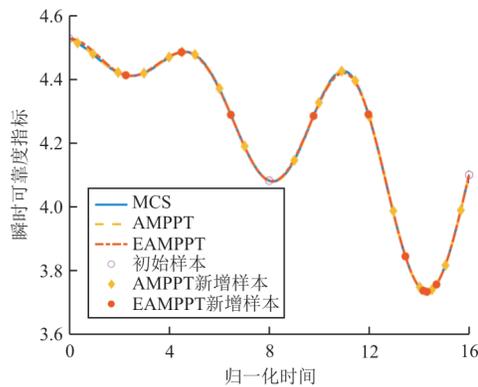


图2 瞬时可靠度指标曲线

Fig. 2 Instantaneous reliability index curve

为了降低时变可靠性分析结果的随机性,采用所有方法重复求解本算例 20 次。AMPPT 和 EAMPPT 法 20 次求解的效率均值和精度均值如表 3 所示, EAMPPT 法 20 次结果相对误差的箱线图如图 3 所示。

表 3 解析算例的时变可靠性分析结果
Table 3 Results of time-varying reliability analysis of analytical examples

方法	效率		精度	
	搜索次数	调用次数	累积失效概率	相对误差/%
MCS	—	1×10^9	$2.930 0 \times 10^{-4}$	—
AMPPT	17	271	$3.124 4 \times 10^{-4}$	6.63
EAMPPT	11	208	$3.049 4 \times 10^{-4}$	4.08

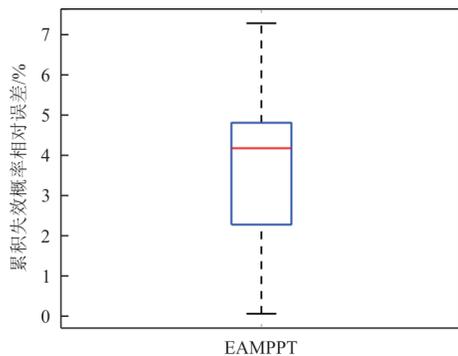


图3 EAMPPT法相对误差箱线图

Fig. 3 Box plot of the relative error of results of EAMPPT

从图 2、表 3 可以看出: AMPPT 和 EAMPPT 法得到的瞬时可靠度指标曲线都与 MCS 法得到的曲线高度吻合。AMPPT 法所用 MSE 准则在全局范围内较均匀地添加了样本点, 而 EAMPPT 法采用的 EI 准则可将更多的样本取在时变可靠性分析更关注的瞬时可靠度较小的区域, 提高了样本的

利用率。在本算例中, 与 AMPPT 法相比, 在保证 Kriging 模型一定全局精度的条件下, EAMPPT 法的 MPP 搜索次数的均值从 17 次减少为 11 次, 极限状态函数的调用次数仅为 208 次, 有效降低了建模成本。从时变可靠性分析的结果来看, 相比 AMPPT 法, EAMPPT 法也具有更高的计算精度。

从图 3 可以看出: EAMPPT 法所求累积失效概率的相对误差集中在 2%~5% 之间, 具有较好的鲁棒性。

3.2 水动力涡轮叶片的时变可靠性分析

本算例的研究对象为一种水力发电装置的涡轮叶片。叶片受到河流的流动载荷, 带动发电装置工作。简化的叶片横截面如图 4 所示, 其中 l 为叶片的宽度参数, d_1 和 d_2 为叶片的高度参数。作用在叶片上的河流载荷如图 5 所示。

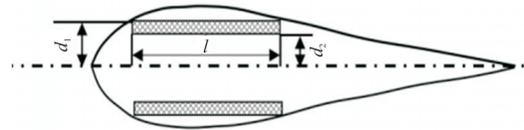


图4 水动力涡轮叶片横截面

Fig. 4 Cross section of hydrodynamic turbine blade

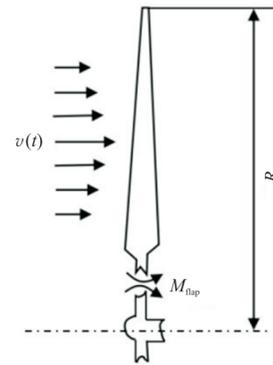


图5 作用在叶片上的河流载荷

Fig. 5 River loads acting on leaves

河流的流动载荷与流速有关, 而河流流速又受季节影响, 因此河流流速具有不确定性。将流速用非平稳随机过程 $v(t)$ 定义, 其均值、标准差和自相关系数函数满足如下公式:

$$\begin{cases} \mu_v(t) = \sum_{i=1}^4 a_i^m \sin(b_i^m t + c_i^m) \\ \sigma_v(t) = \sum_{j=1}^4 a_j^s \exp\left\{-\left[(t - b_j^s)/c_j^s\right]^2\right\} \\ \rho_v(t_1, t_2) = \cos[2\pi(t_2 - t_1)] \end{cases} \quad (17)$$

系数 a 、 b 和 c :

$$\begin{aligned} a_1^m &= 3.815, a_2^m = 2.528, a_3^m = 1.176, a_4^m = -0.078\ 56, \\ b_1^m &= 0.289\ 5, b_2^m = 0.588\ 7, b_3^m = 0.761\ 9, b_4^m = 2.183, \\ c_1^m &= -0.266\ 8, c_2^m = 0.965\ 1, c_3^m = 3.116, c_4^m = -3.161, \\ a_1^s &= 0.738\ 2, a_2^s = 1.013, a_3^s = 1.875, a_4^s = 1.283, \\ b_1^s &= 6.456, b_2^s = 4.075, b_3^s = 9.913, b_4^s = 1.035, \\ c_1^s &= 0.919\ 3, c_2^s = 1.561, c_3^s = 6.959, c_4^s = 2.237. \end{aligned}$$

叶片受到河流流动载荷,在其根部产生的弯矩为

$$M_{\text{flap}} = \frac{1}{2} \rho v^2(t) C_m \quad (18)$$

式中: ρ 为水的密度,值为 $0.342\ 2$; C_m 为弯矩系数,值为 $1 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$ 。

当叶片产生的应变大于材料允许的应变时,处于失效状态。因此,极限状态函数定义为

$$g(t) = \epsilon - \frac{M_{\text{flap}} l}{EI} \quad (19)$$

式中: ϵ 为材料允许的应变; E 为弹性模量; I 为叶片根部的惯性矩,其可由式(20)计算。

$$I = \frac{2}{3} l (d_1^3 - d_2^3) \quad (20)$$

在本算例中,取时间间隔为 $[0, 12]$,单位为月,其相关的随机参数分布如表 4 所示。

表 4 水动力涡轮叶片随机参数的分布
Table 4 Distribution of random parameters of hydrodynamic turbine blades

参数	分布类型	均值	标准差	自相关系数函数
l/m	正态分布	0.220	0.002 20	—
d_1/m	正态分布	0.025	0.000 25	—
d_2/m	正态分布	0.019	0.000 19	—
ϵ	正态分布	0.025	0.000 25	—
$v(t)/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	高斯过程	$\mu_v(t)$	$\sigma_v(t)$	$\rho_v(t_1, t_2)$

本算例对于 MCS 法,将 $[0, 12]$ 离散成 300 个时刻,每个时刻对应的样本量为 1×10^6 ;对于 TDTRA 法,将 $[0, 12]$ 离散成 250 和 300 个时刻。AMPPT 法和 EAMPPT 法在 0、6 和 12 进行初始取样。累积失效概率计算结果的精度用与 MCS 结果的相对误差来表示,分析结果如表 5 所示。

累积失效概率随时间的变化曲线如图 6 所示。

表 5 水动力涡轮叶片的时变可靠性分析结果
Table 5 Results of time-varying reliability analysis of hydrodynamic turbine blades

方法	效率		精度	
	搜索次数	调用次数	累积失效概率	相对误差/%
MCS	—	3×10^9	$2.937\ 0 \times 10^{-3}$	—
TDTRA-300	300	9 462	$2.902\ 0 \times 10^{-3}$	1.19
TDTRA-250	250	7 908	$2.855\ 0 \times 10^{-3}$	2.79
AMPPT	31	498	$2.915\ 1 \times 10^{-3}$	0.75
EAMPPT	15	282	$2.929\ 0 \times 10^{-3}$	0.27

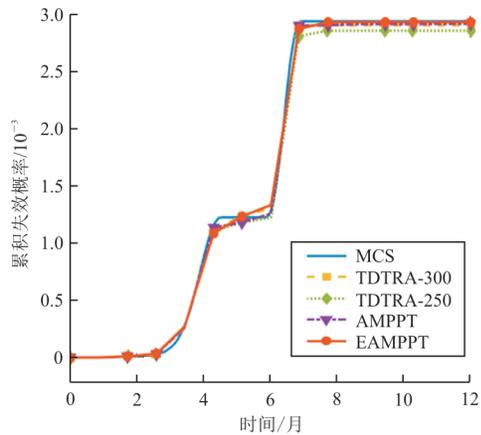


图 6 水动力涡轮叶片的累积失效概率曲线
Fig. 6 Cumulative failure probability curve of hydrodynamic turbine blades

从表 5、图 6 可以看出:本文所提出的 EAMPPT 法共进行了 15 次 MPP 搜索,调用 282 次极限状态函数,与 MCS 法结果的相对误差仅为 0.27%;TDTRA 法的计算精度随着离散时刻数量的增加而提高,取离散时刻数为 300 时,TDTRA 法的相对误差为 1.19%,极限状态函数调用次数为 9 462,计算精度和效率都不如 EAMPPT 法;AMPPT 法计算精度与 EAMPPT 法相近,但对极限状态函数的调用次数约为后者的 2 倍。本算例的结果说明,与 AMPPT 法相比, EAMPPT 法在面对瞬时可靠度随时间变化相对复杂的时变可靠性分析问题时,具有更高的计算效率和精度。

3.3 航天飞机机翼的时变可靠性分析

机翼作为航天飞机最重要的受力部件之一,其可靠性对飞行器的安全具有重要意义。本实例

选取某型可重复使用航天飞机的机翼作为研究对象,分析其在再入过程的时变可靠性。

该型航天飞机机翼由蒙皮、翼梁和翼肋组成。在有限元分析中采用壳单元对其进行建模,如图 7 所示。

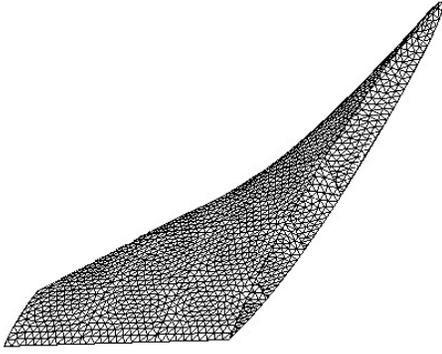


图 7 航天飞机机翼有限元模型

Fig. 7 Finite element model of wing of a space vehicle

本实例考虑的不确定性变量为机翼蒙皮、翼肋和翼梁的厚度以及其材料的弹性模量,分别记为 W_s 、 W_r 、 W_b 、 E_{Al} 和 E_{Ti} 。当飞行器热防护系统正常工作时,内部结构温度的变化较小,故本实例中只考虑作用在机翼表面的时变气动分布载荷,参考文献[31]的飞行状态和飞行弹道计算得出。

当蒙皮或骨架上的最大范式应力大于相应材料的屈服强度时结构失效,故本实例的极限状态函数定义如下:

$$g(\mathbf{X}, t) = \max(\sigma_{skin-max} - \epsilon_{Al}, \sigma_{frame-max} - \epsilon_{Ti}) \quad (21)$$

式中: ϵ_{Al} 、 ϵ_{Ti} 分别为蒙皮和骨架材料的屈服强度; $\sigma_{skin-max}$ 和 $\sigma_{frame-max}$ 分别为蒙皮和骨架上的最大应力。

极限状态函数是不确定性变量和时间的函数,可由有限元软件计算得出。航天飞机机翼材料属性和机翼不确定性变量的具体分布如表 6~表 7 所示。

表 6 航天飞机机翼的材料属性

Table 6 Material properties of the wing of a space vehicle

部位	材料	弹性模量/GPa	密度/($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	泊松比	屈服强度/MPa
蒙皮	铝合金	73	2 700	0.32	336
骨架	钛合金	105	4 450	0.32	875

表 7 航天飞机机翼随机参数分布
Table 7 Random parameter distribution of wing of a space vehicle

参数	分布类型	均值	标准差
W_s/m	正态分布	0.002	0.000 20
W_r/m	正态分布	0.012	0.001 20
W_b/m	正态分布	0.015	0.000 15
E_{Al}/Pa	正态分布	7.3×10^{10}	3.5×10^9
E_{Ti}/Pa	正态分布	1.05×10^{11}	4.5×10^9

对包含复杂有限元计算的时变可靠度计算问题,MCS法计算成本过高,故本实例采用TDTRA法作为对比方法。对于TDTRA法,将时间间隔[0, 1 500]离散成3 000个时刻。AMPPT法和EAMPPT法都在0、750和1 500这三个时刻进行初始取样。时变可靠性分析结果如表 8 所示,累积失效概率曲线如图 8 所示。

表 8 航天飞机机翼的时变可靠性分析结果
Table 8 Results of time-varying reliability analysis of a space vehicle wing

方法	效率		精度	
	搜索次数	评价次数	累积失效概率	相对误差/%
TDTRA-3000	3 000	188 778	$1.572 6\times 10^{-2}$	—
AMPPT	27	1 596	$1.671 6\times 10^{-2}$	6.30
EAMPPT	54	3 552	$1.555 3\times 10^{-2}$	1.10

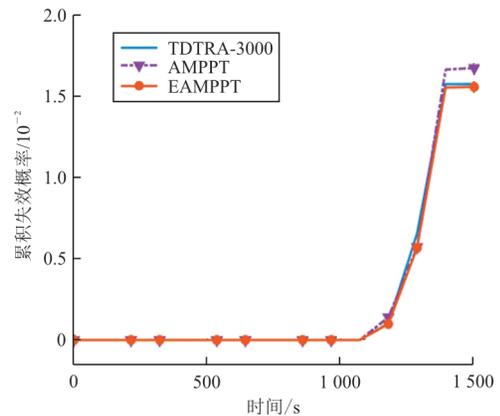


图 8 航天飞机机翼累积失效概率曲线

Fig. 8 Cumulative failure probability curve of space vehicle wing

从表 8、图 8 可以看出:在该工程实例中,EAMPPT法在计算精度相对误差仅有 1.10% 的

情况下,调用初始极限状态函数的次数为 3 552 次,远小于 TDTRA 法的 188 778 次。AMPPT 法的结果相较于 TDTRA 法差异较大,其原因是本实例 MPPT 法得到的是五维空间中的曲线,在其 Kriging 模型的构建中,AMPPT 法在模型预测方差平均值最大处添加样本,虽然仅用 27 个样本构建的模型就满足收敛条件,但不能保证模型在每一维的精度都满足要求,无法继续增加样本以提高建模精度。本实例证明了在面对 MPPT 非线性程度较高的复杂时变可靠性分析问题,所提出的 EAMPPT 法能够着重在瞬时可靠度低的地方加点以保证较高的计算精度和计算效率。

4 结 论

1) EAMPPT 法通过构建 MPPT 的 Kriging 模型,减少了 MPP 的搜索次数,从而减少了对极限状态函数的调用次数,降低了时变可靠性分析的计算成本。

2) EAMPPT 法结合时间离散所得串联系统瞬时可靠度最小的组件决定整个系统可靠度的特点进行自适应采样,能够将更多样本取在瞬时可靠度小的时刻,提高样本的利用率,减少了对 MPP 的搜索次数。同时,EAMPPT 法具有较好的鲁棒性。

3) 水动力涡轮叶片和航天飞机机翼的时变可靠性分析结果表明,与 AMPPT 法相比,EAMPPT 法在保证计算精度的同时,显著提高了计算效率,能够用于高效求解复杂系统时变可靠性分析问题,且具有更好的适用性。

参 考 文 献

- [1] 陈秋宇,王强,史越,等. 非概率可靠性的拉伸载荷下飞机含孔复合材料安全性分析[J]. 空军工程大学学报, 2022, 23(4): 29-34.
CHEN Qiuyu, WANG Qiang, SHI Yue, et al. Study on the safety of aircraft composite materials containing holes under tensile loading based on non-probabilistic reliability[J]. Journal of Air Force Engineering University, 2022, 23(4): 29-34. (in Chinese)
- [2] 温轶群,段富海. 基于 GO 法的某预警机飞控系统可靠性分析[J]. 机电工程技术, 2022, 51(10): 57-60.
WEN Yiqun, DUAN Fuhai. Reliability analysis of automatic flight control system of airborne early warning aircraft based on GO methodology[J]. Mechanical & Electrical Engineering Technology, 2022, 51(10): 57-60. (in Chinese)
- [3] 黄洪钟,童辉,邓智铭,等. 基于 ALK-MCS 算法的航空发动机轴承可靠性分析[J]. 电子科技大学学报, 2022, 51(3): 438-443.
HUANG Hongzhong, TONG Hui, DENG Zhiming, et al. Reliability analysis for bearings of aero-engine based on ALK-MCS algorithm[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2022, 51(3): 438-443. (in Chinese)
- [4] 陈小前,姚雯,欧阳琦. 飞行器不确定性多学科设计优化理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013.
CHEN Xiaoqian, YAO Wen, OUYANG Qi. Theory and application of uncertainty-based multidisciplinary design optimization for flight vehicles [M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese)
- [5] 史朝印,吕震宙,李璐祎,等. 结构失效概率计算的 ASVR-MCS 方法[J]. 机械工程学报, 2019, 55(24): 260-268.
SHI Zhaojin, LYU Zhenzhou, LI Luyi, et al. An efficient ASVR-MCS method for estimating failure probability [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(24): 260-268. (in Chinese)
- [6] 马红亮,冯蕴雯,刘骞,等. 一种航空发动机运行可靠性评估方法[J]. 航空工程进展, 2021, 12(5): 42-49.
MA Hongliang, FENG Yunwen, LIU Qian, et al. Evaluation method of aeroengine operation reliability[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2021, 12(5): 42-49. (in Chinese)
- [7] 陈浩宇,王彬文,宋巧治,等. 高超声速飞行器热颤振研究现状与展望[J]. 航空工程进展, 2022, 13(1): 19-27.
CHEN Haoyu, WANG Binwen, SONG Qiaozhi, et al. Research progress and prospect of thermal flutter of hypersonic vehicles[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2022, 13(1): 19-27. (in Chinese)
- [8] WANG Zequn, WANG Pingfeng. A new approach for reliability analysis with time-variant performance characteristics [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2013, 115: 70-81.
- [9] CHEN Jianbing, LI Jie. The extreme value distribution and dynamic reliability analysis of nonlinear structures with uncertain parameters[J]. Structural Safety, 2007, 29(2): 77-93.
- [10] LI Jing, MOURELATOS Z P. Time-dependent reliability estimation for dynamic problems using a niching genetic algorithm [J]. Journal of Mechanical Design, 2009, 131(7): 339-355.
- [11] LI Jie, CHEN Jianbing, FAN Wenliang. The equivalent extreme-value event and evaluation of the structural system reliability[J]. Structural Safety, 2007, 29(2): 112-131.
- [12] WANG Zequn, WANG Pingfeng. A nested extreme response surface approach for RBDO with time-dependent probabilistic constraints[C]// International Design Engineer-

- ring Technical Conferences and Computers and Information in Engineering. USA: American Society of Mechanical Engineers, 2012: 735-744.
- [13] HU Zhen, DU Xiaoping. Mixed efficient global optimization for time-dependent reliability analysis [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2015, 137(5): 514-515.
- [14] HU Zhen, MAHADEVAN S. A single-loop Kriging surrogate modeling for time-dependent reliability analysis [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2016, 138(6): 1715-1727.
- [15] LUTES L D, SARKANI S. Reliability analysis of systems subject to first-passage failure[R]. UK: NASA, 2009.
- [16] RICE S O. Mathematical analysis of random noise[J]. *The Bell System Technical Journal*, 1944, 23(3): 282-332.
- [17] ANDRIEU-RENAUD C, SUDRET B, LEMAIRE M. The PHI2 method: a way to compute time-variant reliability [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2004, 84(1): 75-86.
- [18] 张义民. 机械动态与渐变可靠性理论与技术评述[J]. *机械工程学报*, 2013, 49(20): 101-114.
ZHANG Yimin. Review of theory and technology of mechanical reliability for dynamic and gradual systems[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 49(20): 101-114. (in Chinese)
- [19] JIANG Chao, HUANG Xinping, WEI Xinpeng, et al. A time-variant reliability analysis method for structural systems based on stochastic process discretization [J]. *International Journal of Mechanics & Materials in Design*, 2017(13): 173-193.
- [20] GONG Changqing, FRANGOPOL D M. An efficient time-dependent reliability method [J]. *Structural Safety*, 2019, 81: 101864.
- [21] ZHANG Yunwei, GONG Chunlin, LI Chunna. Efficient time-variant reliability analysis through approximating the most probable point trajectory [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, 63(1): 289-309.
- [22] JIANG Chao, WEI Xinpeng, HUANG Zhiliang, et al. An improved TRPD method for time-variant reliability analysis [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 58(5): 1935-1946.
- [23] RACKWITZ R, FLESSLER B. Structural reliability under combined random load sequences [J]. *Computers & Structures*, 1978, 9(5): 489-494.
- [24] METROPOLIS N, ULAM S. The Monte Carlo method [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1949, 247: 335-341.
- [25] 熊芬芬. 稳健优化设计中代理模型不确定性的研究 [J]. *机械工程学报*, 2014, 50(19): 136-143.
XIONG Fenfen. Robust design optimization considering metamodel uncertainty [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, 50(19): 136-143. (in Chinese)
- [26] HOHENBICHLER M, RACKWITZ R. First-order concepts in system reliability [J]. *Structural Safety*, 1982, 1(3): 177-188.
- [27] HAN Zhonghua, ZHANG Keshi. Surrogate-based optimization [J]. *Real-world Applications of Genetic Algorithms*, 2012, 343: 36125.
- [28] 熊芬芬, 杨树兴, 刘宇, 等. 工程概率不确定性分析方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.
XIONG Fenfen, YANG Shuxing, LIU Yu, et al. Probabilistic uncertainty analysis methods in engineering [M]. Beijing: Science Press, 2015. (in Chinese)
- [29] JIANG Chen, QIU Haobo, GAO Liang, et al. Real-time estimation error-guided active learning Kriging method for time-dependent reliability analysis [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, 77: 82-98.
- [30] WANG Lei, WANG Xiaojun, WU Di, et al. Structural optimization oriented time-dependent reliability methodology under static and dynamic uncertainties [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 57(4): 1533-1551.
- [31] LOOMIS M, VENKATAPATHY E, PAPADOPOULOS P, et al. Aeroheating and aerodynamic CFD validation and prediction for the X-38 program [C] // 32nd Thermophysics Conference. USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1997: 2478.

(编辑:丛艳娟)